Jurnal Fraction, Vol. 3 No 1, Juni 2023, Hal 1-7
E-ISSN: **2830-2028**; P-ISSN: **2962-1402**
Dipublikasi: Juni 2023

DEKOMPOSISI NILAI SINGULAR PADA RUANG VEKTOR

(The Spectral Decompositions on a Vector Space)

Lalu Hasan Ghoffari[1,a]
[1]Universitas Mataram [Email: lalu15ghoffari@gmail.com]
[a]lalu15ghoffari@gmail.com

ABSTRAK

Aljabar linier lanjutan mempelajari beberapa teori dalam matematika khususnya pada matriks. Salah satu teori yang dipelajari adalah metode dekomposisi nilai singular. Dekomposisi nilai singular merupakan salah satu metode penguraian suatu matriks. Dekomposisi nilai singular menguraikan matriks $A_{m\times n}$ sedemikian sehingga $A = U\Sigma V^T$ dimana   merupakan matriks diagonal dengan elemen di diagonalnya adalah nilai-nilai singular dari A dan matriks U serta V adalah matriks-matriks yang kolomnya adalah vektor-vektor singular kiri dan singular kanan dari matriks A yang bersesuaian. Metode dekomposisi nilai singular menjadi penting untuk dipelajari karena metode ini banyak diterapkan dalam beberapa hal, salah satu contonya adalah sebagai metode yang digunakan untuk pengolahan citra khususnya pada aplikasi pengenalan wajah manusia. Adapun metode yang digunakan dalam makalah ini adalah kajian pustaka atau disebut juga studi literatur, yaitu penelitian yang dilakukan dengan mengumpulkan teori dan informasi yang berhubungan dengan penelitian dengan bantuan referensi seperti buku maupun jurnal ilmiah.
Kata kunci: dekomposisi, nilai singular, matriks

ABSTRACT

Advanced linear algebra studies several theories in mathematics, especially on matrices. One of the theories studied is the singular value decomposition. Singular value decomposition is one method of decomposing a matrix. Singular value decomposition decomposes the matrix $A_{m\times n}$ such that $A = U\Sigma V^T$ where   is a diagonal matrix with the elements on the diagonal are singular values of A and matrices U and V are matrices whose columns are singular vectors left and right singulars of the corresponding matrix A. The singular value decomposition method is important to study because this method is widely applied in several ways, one example is as a method used for image processing, especially in human face recognition applications. The method used in this paper is a literature review or also called a literature study, namely research conducted by collecting theories and information related to research with the help of references such as books and scientific journals.
Keywords: *decomposition, singular value, matrices.*

1. PENDAHULUAN

Beberapa ilmu yang sering digunakan dalam ilmu matematika adalah ilmu tentang aljabar linier dan aljabar linier lanjutan. Aljabar linier dan aljabar linier lanjutan mempelajari beberapa teori dalam ilmu matematika, diantaranya adalah ruang vektor, ruang hasil kali dalam, ruang dual, nilai dan vektor eigen, diagonalisasi matriks, dekomposisi spektral dan dekomposisi nilai singular.

Pada makalah ini, akan dibahas tentang salah satu teori dalam aljabar linier lanjutan yaitu dekomposisi nilai singular. Dekomposisi matriks merupakan suatu proses menguraikan matriks menjadi penjumlahan atau perkalian beberapa matriks. Dalam hal ini, produk yang dihasilkan dari proses mendekomposisi matriks tersebut apabila dijumlahkan atau dikalikan maka akan menghasilkan matriks asalnya (matriks yang dilakukan dekomposisi). Terdapat beberapa metode dalam menguraikan matriks, diantaranya adalah diagonalisasi matriks, dekomposisi spektral dan dekomposisi nilai singular [1]–[3].

Banarjee dan Roy menyatakan bahwa dalam menguraikan matriks dengan metode diagonalisasi dan dekomposisi spektral, matriks yang akan diuraikan harus merupakan matriks bujur sangkar, yaitu matriks dengan banyaknya kolom dan baris yang sama [4]. Berbeda dengan kedua metode tersebut dekomposisi nilai singular dapat dilakukan apabila matriks yang akan didekomposisi adalah matriks

Jurnal Fraction, Vol. 3 No 1, Juni 2023, Hal 1-7
E-ISSN: **2830-2028**; P-ISSN: **2962-1402**
Dipublikasi: Juni 2023

non bujur sangkar. Terdapat beberapa definisi dan contoh yang mendasari terbentuknya beberapa teorema dan langkah-langkah dalam melakukan dekomposisi nilai singular pada matriks yaitu sebagai berikut.

Definisi 1.1 *Misalkan A adalah matriks berukuran $n \times n$. Vektor tidak nol x pada $\mathbb{R}^n$ dinamakan vektor eigen dari A ("Eigen" diambil dari bahasa Jerman yang artinya "Karakteristik") jika Ax merupakan kelipatan skalar dari x yaitu $Ax = \lambda x$. Kemudian skalar λ dinamakan nilai eigen dari A dan x dinamakan vektor eigen yang bersesuaian dengan λ* [2].

Persamaan $Ax = \lambda x$ dapat ditulis sebagai $Ax = \lambda Ix$ dimana I merupakan matriks identitas sehingga dapat dituliskan juga sebagai

$$(A - \lambda I)x = 0$$

untuk mendapatkan solusi x yang tak nol maka persamaaan tersebut haruslah memiliki determinan yang sama dengan nol. Dengan demikian nilai eigen dari matriks persegi A dapat diperoleh jika dan hanya jika

$$\det(A - \lambda I)x = 0$$

atau yang disebut dengan persamaan karakteristik dari A [2]. Berikut ini merupakan contoh dalam mencari nilai eigen suatu matriks.

Contoh 1.1 *Nilai eigen dari matriks $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ dapat dicari dengan membentuk persamaan karakteristik dari matriks A yaitu :*

$$\det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 \\ 5 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)(1-\lambda) = 0$$

sehingga diperoleh nilai-nilai eigen $\lambda_1 = 3$ dan $\lambda_2 = 1$. Kemudian untuk mencari ruang ataupun vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigennya tersebut, dapat dilakukan dengan melakukan subtisusi nilai eigen pada persamaan :

$$(A - \lambda I)x = 0$$

sehingga untuk $\lambda = 3$,

$$\begin{bmatrix} 3-3 & 0 \\ 5 & 1-3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$5x_1 - 2x_2 = 0$$

$$5x_1 = 2x_2$$

Misal $x_2 = t$ maka $x_1 = \frac{2}{5}t$. Diperoleh vektor-vektor eigen dari matriks A yang bersesuaian dengan $\lambda = 3$ adalah solusi tak nol dari bentuk :

$$x = \begin{bmatrix} \frac{2}{5}t \\ t \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

Kemudian untuk ruang eigen dari vektor-vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 3$ adalah

$$E_3 = span\left\{\begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ 1 \end{bmatrix}\right\} = span\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}\right\}$$

Untuk $\lambda = 1$,

$$\begin{bmatrix} 3-1 & 0 \\ 5 & 1-1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$x_1 = 0x_2$$
misal $x_2 = t$ maka $x_1 = 0$. Diperoleh vektor-vektor eigen dari matriks A yang bersesuaian dengan $\lambda = 1$ adalah solusi tak nol dari bentuk :
$$x = \begin{bmatrix} 0 \\ t \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R}$$
Kemudian untuk ruang eigen dari vektor-vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 1$ adalah
$$E_1 = span\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

Selain definisi nilai dan vektor eigen, sebelum mempelajari dekomposisi nilai singular juga penting untuk mengetahui definisi norm dan vektor satuan sebagai berikut.

Definisi 1.2 *Jika $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ maka norm dari v yang dinotasikan dengan $\|v\|$ didefinisikan dengan :*
$$\|v\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}$$
Selanjutnya vektor satuan dari v *yang dinotasikan dengan $\bar{v}$ didefinisikan oleh :*
$$\bar{v} = \frac{1}{\|v\|}(v_1, v_2, \dots, v_n) \qquad [2]$$

Untuk mempermudah pemahaman dalam melakukan metode dekomposisi nilai singular, berikut ini diberikan definisi tentang matriks orthogonal, ortonormal dan normalisasi matriks

Definisi 1.3 *Matriks yang kolom-kolomnya adalah vektor yang saling ortogonal satu sama lain disebut matriks ortogonal. Dalam hal ini hasil kali titik vektor kolomnya sama dengan nol. Kemudian jika vektor-vektor kolom matriks yang ortogonal merupakan vektor satuan (vektor dengan norm 1) maka matriks ortogonal tersebut disebut matriks ortonormal. Lebih jauh, proses mengubah matriks ortogonal menjadi matriks ortonormal disebut normalisasi matriks* [4].

Selanjutnya akan diberikan definisi $rank$ dari suatu matriks yang menjadi dasar dalam teorema-teorema pada metode dekomposisi nilai singular.

Definisi 1.4 *Dimensi dari ruang baris dan ruang kolom dari matriks A disebut $rank$ dari matriks A dan dinotasikan dengan $rank(A)$* [4].

2. METODE PENELITIAN

Metode yang digunakan dalam artikel ini adalah kajian pustaka atau disebut juga studi literatur yang berkaitan dengan definisi, contoh, teorema, dan penerapan yang membahas tentang dekomposisi nilai singular. Memahami berbagai definisi yang berkaitan tentang dekomposisi nilai singular. Kemudian membuat artikel tentang dekomposisi nilai singular berdasarkan studi literatur yang telah dilakukan.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada artikel ini, penulis akan terfokus pada definisi, contoh serta penerapan dekomposisi nilai singular.

Teorema 3.1. *Jika A adalah matriks berukuran $m \times n$, maka A dan $A^T A$ memiliki ruang nol, rank dan ruang baris yang sama. Kemudian A^T dan $A^T A$ memiliki ruang kolom yang sama* [4].

Teorema 3.2. *Jika A adalah matriks berukuran $m \times n$, maka $A^T A$ nilai eigen dari $A^T A$ tidak negatif* [2].

Jurnal Fraction, Vol. 3 No 1, Juni 2023, Hal 1-7
E-ISSN: **2830-2028**; P-ISSN: **2962-1402**
Dipublikasi: Juni 2023

BUKTI. Karena $A^T A$ dapat didiagonalisasi secara ortogonal maka terdapat basis ortonormal $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ untuk $\mathbb{R}^n$ yang terdiri atas vektor eigen dari $A^T A$. Jika $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ adalah nilai eigen yang sesuai untuk $1 \le i \le n$ maka :

$$\|Av_i\|^2 = Av_i \,.\, Av_i = v_i \,.\, A^T Av_i = v_i . \lambda_i v_i = \lambda_i (v_i . v_i) = \lambda_i \|v_i\|^2 = \lambda_i$$

Sehingga diperoleh dari hubungan tersebut $\lambda_i \ge 0$. □

Definisi 3.1 *Misalkan A adalah suatu matriks dengan rank r. Nilai singular dari A didefinisikan dengan nilai eigen positif dari $(A^T A)^{1/2}$. Dengan demikian, jika σ merupakan nilai singular dari matriks A maka σ adalah nilai eigen positif dari $(A^T A)^{1/2}$ sehingga diperoleh σ^2 adalah nilai eigen dari $A^T A$* [4].

Teorema 3.3 *Jika suatu matriks A mempunyai rank r maka terdapat sejumlah r nilai singular tak nol dari matriks* A [2].

BUKTI. Misalkan $\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \cdots \ge \lambda_n$ adalah nilai-nilai eigen dari matriks. Artinya terdapat n vektor eigen dari nilai-nilai eigen yang bersesuaian tersebut. Himpunan vektor eigen membentuk $x_1, x_2, \dots, x_n$ suatu basis ortogonal untuk $\mathbb{R}$. Kemudian dapat diperoleh basis ortonormal dengan menormalisasikan basis ortogonal tersebut. Perhatikan hasil kali dalam :

$$\langle S_i,S_j\rangle.\langle S_i,S_j\rangle = 0, \text{ untuk } i \ne j \text{ dan}$$

$$\langle S_i,S_j\rangle = 1, \text{ untuk } i = j$$

akibatnya

$$\langle AS_i,AS_i\rangle = (AS_i)^T(AS_i) = S_i AA^T S_i = \lambda_i \|S_i\|^2$$

Sehingga diperoleh $\lambda_i > 0$.

Menurut definisi 3.3 berlaku ${\sigma_i}^2 = \lambda_i = \|AS_i\|^2$ untuk setiap i . Karena rank matriks A merupakan dimensi dari ruang kolomnya yaitu $\dim\{Ax \mid x \in \mathbb{R}^m\}$ dan diketahui $rank\ (A) = r$, maka :

$$\mathrm{AS}_1 = \mathrm{AS}_2 = \cdots = \mathrm{AS}_\mathrm{r} \ne 0 \text{ dan } AS_{r+1} = AS_{r+2} = \cdots = AS_n = 0$$

Dengan demikian diperoleh $\sigma_i \ne 0$ untuk $i = 1, 2, \dots, r$ yang artinya terdapat sejumlah r nilai singular tak nol dari matriks A. □

Contoh 3.1 *Misalkan* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, *nilai singular dari matriks A dapat ditentukan dengan menghitung nilai eigen dari* $A^T A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$ *yaitu* 0 *dan* 15. *Dengan demikian berdasarkan Definisi 3.1 maka nilai singular dari matriks* A *adalah* 0 *dan* $\sqrt{15}$.

Definisi 3.2 *Misalkan A adalah suatu matriks real berukuran $m \times n$. Vektor tak nol* $\mathrm{u} \in \mathrm{R}^\mathrm{m}$ *dan* $v \in \mathbb{R}^n$ *masing-masing disebut sebagai vektor singular kiri dan vektor singular kanan apabila terdapat nilai singular σ sedemikian sehingga $Av = \sigma u$ dan $A^T u = \sigma v$ Selanjutnya, (σ, u) disebut pasangan singular kiri dari A dan (σ, v) disebut sebagai pasangan singular kanan dari A* [2].

Teorema 3.4 *Misalkan A adalah matriks real berukuran $m \times n$. Jika rank dari A adalah , maka terdapat matriks $\Sigma_{m\times n}$, dimana elemen diagonal pada Σ adalah nilai singular dari* A *yaitu $\sigma_1 \ge \sigma_2 \ge \cdots \ge \sigma_r > 0$, dan terdapat matriks $U_{m\times m}$ serta $V_{n\times n}$ sedemikian sehingga $A = U\Sigma V^T$* [4].

BUKTI.Misalkan λ_i dan $v_i$masing-masing adalah nilai-nilai eigen dan basis-basis ortonormal dari A, maka berdasarkan teorema sebelumnya $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i} = \|Av_i\| > 0$ untuk $1 \le i \le r$ dan $\{Av_1, Av_2, \dots, Av_r\}$ adalah basis ortogonal dari ruang kolom A untuk $1 \le i \le r$, didefinisikan

$$u_i = \frac{1}{\|Av_i\|} Av_i = \frac{1}{\sigma_i} Av_i$$

sehingga,

$$Av_i = \sigma_i u_i, \quad 1 \le i \le r.$$

Kemudian diperluas himpunan basis ortonormal $\{u_1, \dots, u_r\}$ ke suatu basis ortonormal $\{u_1, \dots, u_m\}$ di $\mathbb{R}^m$, dan misal $U = [u_1 \;\; u_2 \;\; \dots \;\; u_m]$ dan $V = [v_1 \;\; v_2 \;\; \dots \;\; v_n]$ maka U dan V merupakan suatu matriks

Jurnal Fraction, Vol. 3 No 1, Juni 2023, Hal 1-7
E-ISSN: **2830-2028**; P-ISSN: **2962-1402**
Dipublikasi: Juni 2023

ortogonal. Perhatikan bahwa $AV = [Av_1 \ \dots \ Av_r \ 0 \ \dots \ 0] = [\sigma_1 u_1 \ \dots \ \sigma_r u_r \ 0 \ \dots \ 0 \ ]$. Misalkan D adalah diagonal matriks dengan elemen $\sigma_i \dots \sigma_r$, dan Σ , maka

$$U\Sigma = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_m]\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_r & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} = [\sigma_1 u_1 \ \dots \ \sigma_r u_r \ 0 \ \dots \ 0] = AV$$

Dimana V adalah matriks ortogonal, $U\Sigma V^T = AVV^T = A$. □

Definisi 3.3 *Faktorisasi $A = U\Sigma V^T$ disebut dekomposisi nilai singular dari matriks A, dimana A adalah matriks real berukuran $m \times n$, Σ merupakan matriks diagonal dengan elemen di diagonalnya adalah nilai-nilai singular dari A dan matriks U serta V adalah matriks-matriks ortogonal yang kolomnya adalah vektor-vektor singular kiri dan singular kanan dari matriks A yang bersesuaian* [4].

Contoh 3.2 *Menentukan dekomposisi nilai singular dari matriks* $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

Penyelesaian :

Pertama akan ditentukan matriks U.

$$AA^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 1 \\ 1 & 11 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan proses yang sama seperti pada contoh 1.1, diperoleh nilai-nilai eigen dari AA^T adalah $\lambda_1 = 12$ dan $\lambda_2 = 10$ (diurutkan dari yang terbesar).

Untuk $\lambda_1 = 12$, diperoleh ruang eigen $E_{12} = span\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$. Kemudian, untuk $\lambda_2 = 10$,diperoleh ruang eigen $E_{10} = span\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right\}$. dengan demikian diperoleh,

$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, dan $u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, dengan menormalisasi u_1 , dan u_2 diperoleh,

$$\overline{u_1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \ \overline{u_2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Dengan demikian didapatkan matriks U yaitu :

$$U = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Selanjutnya akan ditentukan matriks V^T.

$$A^T A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 2 \\ 0 & 10 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan proses yang sama seperti pada contoh 1.1 diperoleh Nilai-nilai eigen untuk matriks $\mathrm{A^T A}$ adalah $\lambda_1 = 12$, $\lambda_2 = 10$, dan $\lambda_3 = 0$. Untuk $\lambda = 12$, diperoleh ruang eigen $E_{12} = span\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$. Kemudian, untuk $\lambda = 10$, diperoleh ruang eigen $E_{10} = span\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$. Selanjutnya, untuk $\lambda = 0$, diperoleh ruang eigen $E_0 = span\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix}\right\}$. Dengan demikian diperoleh,

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{dan } v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

Dengan menormalisasi v_1, v_2, dan v_3 diperoleh,

Jurnal Fraction, Vol. 3 No 1, Juni 2023, Hal 1-7
E-ISSN: **2830-2028**; P-ISSN: **2962-1402**
Dipublikasi: Juni 2023

$$\overline{v_1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}, \ \overline{v_2} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{bmatrix} \text{ dan } \overline{v_3} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{30}} \\ \frac{2}{\sqrt{30}} \\ -\frac{5}{\sqrt{30}} \end{bmatrix}$$

Sehingga didapatkan matriks V yaitu :

$$V = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{30}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{30}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{5}{\sqrt{30}} \end{bmatrix}$$

Jadi matriks V^T nya adalah sebagai berikut

$$V^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{30}} & -\frac{5}{\sqrt{30}} \end{bmatrix}$$

Dengan demikian diperoleh dekomposisi nilai singular matriks A adalah :

$$A = U\Sigma V^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{15} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{30}} & -\frac{5}{\sqrt{30}} \end{bmatrix}$$

Metode dekomposisi nilai singular pada matriks banyak diterapkan dalam beberapa hal seperti *machine learning*, kompresi gambar dan video, *digital watermarking*, hingga pengolahan citra (*image processing*). Pada aplikasi pengenalan wajah manusia dibutuhkan parameter seperti data input, yang terdiri dari data sampel yaitu wajah manusia yang digunakan untuk membentuk basis pada dekomposisi nilai singular dan data gambar uji yaitu gambar sembarang yang digunakan untuk melakukan proses pengujian terhadap gambar sampel yang telah tersimpan di dalam basis data. Proses yang dilakukan pada aplikasi ini yaitu melakukan inisialisasi sampel gambar yang terdapat dalam basis data sistem kemudian dilakukan perhitungan dan pemeriksaan pola wajah yang terdapat dalam gambar uji, lalu dilakukan perbandingan terhadap gambar uji dan gambar sampel, jika terdapat kecocokan aplikasi akan menginformasikan identitas seseorang yang terdapat pada gambar tersebut.Aplikasi dan penerapan dekomposisi ini bisa dilihat lebih detail pada [5]–[9]

4. KESIMPULAN

Dekomposisi nilai singular merupakan suatu proses pemfaktoran matriks real A menjadi perkalian tiga buah matriks yaitu matriks $U, \Sigma,$ dan V^T sehingga $A = U\Sigma V^T$. Dimana U dan V adalah matriks-matriks ortogonal yang kolomnya adalah vektor-vektor singular kiri dan singular kanan dari matriks A dan Σ merupakan matriks diagonal dengan elemen di diagonalnya adalah nilai-nilai singular dari matriks A. Keunggulan dari metode ini yaitu dapat digunakan pada matriks tak persegi. Salah satu contoh penerapan dari metode dekomposisi nilai singular adalah membuat pengolahan citra, khususnya pada aplikasi pengenalan wajah manusia.

DAFTAR PUSTAKA

[1] M. N. Husni, “Diagonalisasi Operator Linear,” *UJMC (Unisda Journal of Mathematics and Computer Science)*, vol. 8, no. 2, pp. 7–13, 2022.

[2] J. E. Gentle, *Matrix Algebra: Theory, Computations, and Applications in Statistics*. New York: Springer , 2007.

[3] I. G. A. W. Wardhana, “The Decomposition of a Finitely Generated Module over Some Special Ring,” *JTAM (Jurnal Teori dan Aplikasi Matematika)*, vol. 6, no. 2, pp. 261–267, 2022, doi: 10.31764/jtam.v6i2.6769.

[4] S. Banerjee and A. Roy, *Linear Algebra and Matrix Analysis for Statistics*. CRC Press, 2014.

[5] Y. Kurniasari and K. Karyati, “SINGULAR VALUE DECOMPOSITION AND DISCRETE COSINE TRANSFORM APPLICATION FOR LANDSAT SATELLITE IMAGE ENHANCEMENT,” *Jurnal Sains Dasar*, vol. 10, no. 1, pp. 16–23, 2021.

[6] A. Firdausi, M. Syafan, and N. N. Bakar, “APLIKASI DEKOMPOSISI NILAI SINGULAR PADA KOMPRESI UKURAN FILE GAMBAR,” *Jurnal matematika Unand*, vol. 4, no. 1, pp. 31–39, 2015.

[7] R. A. W. Fibriyanti and K. Karyati, “APLIKASI DEKOMPOSISI NILAI SINGULAR MATRIKS QUATERNION TERHADAP PERBAIKAN CITRA LOW DAN HIGH PASS FILTERING APPLICATION OF QUATERNION MATRIX SINGULAR VALUE DECOMPOSITION ON LOW AND HIGH PASS FILTERING,” *Jurnal Sains Dasar*, vol. 2022, no. 1, pp. 7–15, 2022.

[8] F. Aryani and D. Yulianti, “APLIKASI METODE SINGULAR VALUE DECOMPOSITION(SVD) PADA SISTEM PERSAMAAN LINIER KOMPLEKS,” *Jurnal Sains*, vol. 10, no. 1, pp. 67–76, 2012.

[9] R. Juliana, I. G. A. W. Wardhana, and Irwansyah, “Some Characteristics of Cyclic Prime, Weakly Prime and Almost Prime Submodule of Gaussian Integer Modulo over Integer,” *AIP Conf Proc*, vol. 2329, no. February, 2021, doi: 10.1063/5.0042586.