Jurnal Fraction, Vol. 3 No 1, Juni 2023, Hal 8-13
E-ISSN: **2830-2028**; P-ISSN: **2962-1402**
Dipublikasi: Juni 2023

DEKOMPOSISI SPEKTRAL PADA RUANG VEKTOR

(The Spectral Decompositions on a Vector Space)

Marena Rahayu Gayatri[1]

[1]Program Studi Matematika, Universitas Mataram, Indonesia, marenarahayu2002@gmail.com

ABSTRAK

Aljabar linier merupakan salah satu bidang yang mempelajari tentang pemetaan linier yang dapat direpresentasikan dengan matriks atau vektor. Dalam hal ini, akan dibahas lebih jauh mengenai matriks. Matriks adalah hal yang cukup menarik untuk dipelajari. Banyak hal yang dasarnya berasal dari matriks, salah satunya diagonalisasi matriks. Diagonalisasi matriks sangat erat kaitannya dengan dekomposisi spektral. Adapun metode yang digunakan adalah dengan mencari studi literatur terkait definisi, contoh – contoh serta penerapan dekomposisi spektral. Salah satu contoh penerapan dekomposisi spektral adalah untuk menetukan delinasi dan distribusi resevoar dan analisis faciesnya pada lingkungan pengendapan laut dalam. Dengan ditemukannya beberapa contoh penerapan dari dekomposisi spektral, maka akan lebih mudah untuk menemukan contoh penerapan yang lain.

Kata kunci: aljabar liner, matriks diagonal, dekomposisi spektral

ABSTRACT

Linear algebra is a field that studies linear mapping which can be represented by matrices or vectors. In this case, the matrix will be discussed further. Matrices are quite an interesting thing to learn. Many things are basically from matrices, one of which is matrix diagonalization. Matrix diagonalization is closely related to spectral decomposition. The method used is to search for literature studies related to definitions, examples, and application of spectral decomposition. One example of the application of spectral decomposition is to determine the delineation and distribution of reservoirs and their facies analysis in deep-sea depositional environments. With some examples of applications of spectral decomposition found, it is easier to find other examples of applications.

Keywords: *linear algebra, diagonal matrix, spectral decomposition.*

1. PENDAHULUAN

Aljabar linier adalah salah satu bidang dalam matematika yang mempelajari sistem persamaan linier seperti pemetaan liner dan representasinya dalam matriks maupun vektor. Matriks adalah salah satu hal yang cukup menarik untuk dipelajari. Terdapat beberapa sifat - sifat pada matriks. Adapun sifat – sifat tersebut adalah

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A} \quad [1.1]$$
$$\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C} \quad [1.2]$$
$$\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA} \quad [1.3]$$
$$\boldsymbol{A}\,(\boldsymbol{BC})=(\boldsymbol{AB})\,\boldsymbol{C} \quad [1.4]$$
$$(\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{t}})^{\boldsymbol{t}}=\boldsymbol{A} \quad [1.5]$$
$$(\boldsymbol{AB})^{\boldsymbol{t}}=\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{t}}\ \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{t}} \quad [1.6]$$
$$(\boldsymbol{A}^{-\boldsymbol{1}})^{-\boldsymbol{1}}=\boldsymbol{A} \quad [1.7]$$
$$(\boldsymbol{AB})^{-\boldsymbol{1}}=\boldsymbol{B}^{-\boldsymbol{1}}\,\boldsymbol{A}^{-\boldsymbol{1}} \quad [1.8]$$

Berdasarkan sifat – sifat tersebut, dapat dipelajari lebih lanjut mengenai ruang eigen. Ruang eigen yang terdiri dari nilai dan vektor eigen. Adapun definisinya sebagai berikut.

Definisi 1.1. *Misalkan A matriks berorde* $n\ x\ n$, *vektor* $x\in\mathbb{R}^n$ *dan* $x\neq0$, *disebut vektor eigen, jika terdapat bilangan real* λ, *yang disebut nilai eigen, sehingga memenuhi persamaan:*

$$Ax=\lambda x \quad [1]$$

Jurnal Fraction, Vol. 3 No 1, Juni 2023, Hal 8-13
E-ISSN: **2830-2028**; P-ISSN: **2962-1402**
Dipublikasi: Juni 2023

Dengan mengingat bahwa vektor eigen $x \neq 0$, maka persamaan di atas harus mempunyai solusi tak trivial, dan oleh karena itu, maka persamaan karakteristik yang diperoleh adalah sebagai berikut:

$$\det\,(A - \lambda I) \qquad [1.9]$$

Untuk memperoleh persamaan yang taknegatif, maka persamaan karakteristik yang dperoleh sebagai berikut :

$$\det\,(\lambda I - A) \qquad [1.10]$$

Contoh 1.1. *Nilai eigen dari matriks* $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ *dapat diperoleh dengan cara sebagai berikut.*

Penyelesaian :

Polinom karakteristik dari matriks A adalah

$$det(\lambda I - A) = det\left(\lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\right) = det\left(\begin{bmatrix} \lambda - 3 & -2 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix}\right) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

Sehingga diperoleh, $\lambda_1 = 1$ dan $\lambda_2 = 2$, jadi, nilai – nilai eigen dari matriks A adalah 1 dan 2.

Untuk $\lambda_1 = 1$ didapatkan SPL homogen

$$\left[\begin{matrix} 1-3 & -2 \\ 1 & 1 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right] = \left[\begin{matrix} -2 & -2 \\ 1 & 1 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right] = \left[\begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right]$$

diperoleh

$$x_1 + x_2 = 0$$
$$x_1 = -x_2$$
$$x_1 = t$$

Maka didapatkan ruang eigennya

$$\left\{t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R}\right\}$$

Untuk $\lambda_2 = 2$ didapatkan SPL homogen

$$\left[\begin{matrix} 2-3 & -2 \\ 1 & 2 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right] = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \left[\begin{matrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right]$$

diperoleh

$$x_1 + 2x_2 = 0$$
$$x_1 = -2x_2$$
$$x_2 = t$$

Maka didapatkan ruang eigennya $\left\{t \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R}\right\}$, vektor-vektor eigen dari matriks adalah $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Vektor eigen yang diperoleh dapat membentuk matriks diagonal. Adapun definisi dari diagonalisasi matriks termuat pada Definisi 1.2 berikut.

Definisi 1.2. *Diagonalisasi matriks adalah proses untuk membuat suatu matriks bujursangkar menjadi matriks diagonal dengan cara mengkonstruksi matriks yang berasal dari vektor-vektor eigen, dimana vektor eigen pasti bebas linear karena vektor eigen adalah basis dari ruang eigen yang mengakibatkan memiliki invers sehingga dengan syarat definisi matriks dapat didiagonalkan dapat ditemukan matriks diagonalnya.* [1]

Diagonalisasi matriks dapat diterapkkan dalam berbagai hal. Salah satunya adalah dekomposisi spektral. Terdapat beberapa penelitian terkait dengan dekomposisi spektral yaitu analisis dekomposisi spektral dengan metode PCA, penerapan dekomposisi spektral [2].

Dekomposisi spektral juga berkaitan erat dengan matriks ortogonal. Adapun definisi dari matriks ortogonal termuat dalam Definisi 1.3 berikut.

Definisi 1.3. *Matriks yang kolom-kolomnya adalah vektor yang saling ortogonal satu sama lain disebut matriks.* [1]

ortogonal. Dalam hal ini hasil kali titik vektor kolomnya sama dengan nol. Kemudian jika vektor-vektor kolom matriks yang ortogonal merupakan vektor satuan (vektor dengan norm 1) maka matriks ortogonal tersebut disebut matriks ortonormal. Lebih jauh, proses mengubah matriks ortogonal menjadi matriks ortonormal disebut normalisasi matriks.

Definisi 1.4. *Jika $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ maka norm dari v yang dinotasikan dengan $\|v\|$ didefinisikan dengan:*

$$\|v\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2} \quad [1]$$

2. METODE PENELITIAN

Adapun metode yang digunakan adalah dengan studi literatur terkait definisi, contoh – contoh, serta penerapan dari dekomposisi spektral. Memahami berbagai definisi yang berkaitan dengan dekomposisi spektral. Kemudian menyusun definisi, contoh – contoh, serta penerapan dari dekomposisi spektral.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada artikel ini, penulis akan terfokus pada definisi, contoh serta penerapan dekomposisi spektral.

Definisi 3.1. *Misalkan A adalah matriks simetri berukuran $n\ x\ n$, maka dekomposisi spektral matriks dari A adalah:*

$$A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, a_i\, a_i^t = PDP^t \quad [3]$$

Dengan λ_i adalah nilai eigen $ke - i$ dan a_i adalah vektor eigen $ke - i$ dari matriks A. P adalah suatu matriks yang elemen – elemennya merupakan vektor eigen berukuran $n\ x\ n$, dan D adalah matriks diagonal yang memiliki nilai eigen pada diagonal utamanya, sehingga

$$A_{(nxn)} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_{i_{(nx1)}} a_{i\ (1xn)}^t = P_{(nxn)} D_{(nxn)}\ P_{(nxn)}^t \quad [3.2]$$

dimana $PP^t = P^tP = 1$ dan D adalah matriks diagonal

$$D_{(nxn)} = \begin{bmatrix} \lambda_i & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

dengan $\lambda_i > 0$, maka $A^{-1} = PD^{-1}P^t = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda}\, a_i\, a_i^t$, karena $(PDP^t)PDP^t = PDP^t\ (PD^{-1}P^t) = PP^t = 1$. Beberapa teorema dekomposisi spektral sebagai berikut.

Teorema 3.1. *Jika λ adalah nilai eigen dari matriks simetri A, maka λ adalah bilangan real. Akibatnya, semua nilai eigen dari matriks simetri real adalah real* [3]

Bukti: Misal x adalah vektor eigen yang sesuai dengan nilai eigen λ. Maka, $x^*\ Ax = \lambda x^*\ x$ dimana x^* adalah adjoint dari x. Karena $A = A^*$, ambil transpose konjugat, maka

$$\bar{\lambda}\ x^*x = (x^*\ Ax)^* = x^*\ A^*\ x = x^*\ Ax = \lambda x^*x$$

Karena $x \neq 0$, maka $x^*x > 0$ dan disimpulkan bahwa $\lambda = \bar{\lambda}$. Oleh karena itu, λ adalah bilangan real.

Teorema 3.1 memuat penjelasan tentang nilai eigen pada matriks simetri. Penjelasan mengenai vektor eigen termuat pada Teorema 3.2 berikut.

Teorema 3.2. *Jika x_1 dan x_2 adalah vektor eigen real bersesuaian dengan 2 nilai eigen yang berbeda λ_1 dan λ_2 dari matriks simetri real. Maka $x_1 \perp x_2$.*

Jurnal Fraction, Vol. 3 No 1, Juni 2023, Hal 8-13
E-ISSN: **2830-2028**; P-ISSN: **2962-1402**
Dipublikasi: Juni 2023

Bukti: Kita punya $Ax_1 = \lambda_1 x_1$ dan $Ax_2 = \lambda_2 x_2$. Maka $x_2' A x_1 = \lambda_1 x'_2 x_1$ ….. (1) dan $x_1' A x_2 = \lambda_2 x'_1 x_2$… (2), dimana $x_1{}'$ merupakan invers dari x_1 dan x_2' merupakan invers dari x_2. Karena A simetri, kurangi persamaan (2) dengan persamaan (1) sehingga didapatkan $(\lambda_1 - \lambda_2) x_1' = 0$. Karena $\lambda_1 \neq \lambda_{2,}$ dapat disimpulkan bahwa $x_1' x_2 = 0$.

Teorema 3.3. *Misalkan A matriks simetri, terdapat matriks ortogonal P dan dan matriks diagonal real D sehingga berlaku $P'AP = D$. Entri diagonal dari D adalah nilai eigen dari A dan kolom dari P bersesuaian dengan vektor eigen.*

Bukti: Akan dibuktikan dengan induksi. Jelas hasilnya benar untuk $n = 1$. Misalkan benar untuk semua $(n-1) \times (n-1)$ matriks simetris real. Akan ditunjukkan A menjadi matriks simetris real $n \times n$ dengan nilai eigen $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots\dots\dots \leq \lambda_n$. Biarkan x_1 menjadi vektor eigen sesuai dengan λ_1. Karena A real dan λ_1 nyata, kita dapat memilih x_1 untuk menjadi nyata. Normalisasikan x_1 sehingga $x_1' x_1 = 1$. Selanjutnya basis ortonormal dari $\mathbb{R}^n$ adalah $\{x_1, x_2, \dots\dots, x_n\}$, andaikan

$$X = [\, x_1 : x_2 : \dots\dots\dots. : x_n] = [x_2 : X_2]$$

Berdasarkan konstruksi ortogonal, maka X ortogonal, jadi $X'X = XX' = I_n$. Oleh karena itu, $X_2' x_1 = 0$

dan

$$X'AX = \begin{bmatrix} x_1{}' \\ X_2{}' \end{bmatrix} A\, [x_1 : X_2] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_1 x_1' X_2 \\ \lambda_1 X_2' x_1 & X_2' A X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0' \\ 0 & B \end{bmatrix}$$

dimana

$$B = X_2' A X_2.$$

Polinom karakteristik dari A sama dengan $X'DX$, yang berasal dari

$$pA^{(t)} = px'Ax^{(t)} = (t - \lambda_1)|\; tI - B| = (t - \lambda_1)\, pB^{(t)}$$

Oleh karena itu, nilai eigen dari B adalah $\lambda_2 \leq \cdots \dots \leq \lambda_{2n.}$ Karena B adalah $(n-1) \times (n-1)$ matriks simetri nyata, berdasarkan hipoteisis induksi terdapat $(n-1) \times (n-1)$ matriks ortogonal S seperti berikut.

$$S'BS = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} = D_2$$

Misalkan $U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix}$. Karena S adalah matriks ortogonal, dapat disimpulkan bahwa U juga merupakan matriks ortogonal. Dan karena membentuk dua matriks ortogonal maka, matriks ortogonal yang lain $P = UX$ juga ortogonal, observasi

$$P'AP = X'U'AUX = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0' \\ 0 & D_2 \end{bmatrix} = D$$

Contoh 3.1. *Dekomposisi spektral dari matriks* $A = \begin{bmatrix} 7 & -1 & -2 \\ -1 & 7 & 2 \\ -2 & 2 & 10 \end{bmatrix}$ *dan ketunggalannya dapat diselesaikan sebagai berikut.*

Penyelesaian :

Akan ditunjukkan bahwa persamaan karakteristik A adalah $(\lambda - 12)(\lambda - 6)^2 = 0$

untuk $\lambda = \lambda_1 = 12$, diperoleh ruang eigen :

$$E_1 = \left(t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \middle|\, t \in \mathbb{R} \right)$$

Jurnal Fraction, Vol. 3 No 1, Juni 2023, Hal 8-13
E-ISSN: **2830-2028**; P-ISSN: **2962-1402**
Dipublikasi: Juni 2023

Basis E_1 yang berrnorma 1 adalah

$$\overrightarrow{e_1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

untuk $\lambda = \lambda_2 = \lambda_3 = 6$
diperoleh ruang eigen :

$$E_2 = \left(s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \right)$$

Dalam menentukan dekomposisi spektral bagi A, diperlukan vektor – vektor eigen yang saling tegak lurus dan bernorma 1. Dalam hal ini, Teorema 3.2 menjamin bahwa vektor – vektor eigen dalam E_1

tegak lurus dengan vektor – vektor eigen dalam E_2. Langkah selanjutnya adalah menentukan vektor – vektor dalam E_2 yang saling tegak lurus. E_2 dibangun oleh $\vec{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ dan $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ sebagai vektor – vektor basisnya. Untuk menentukan basis ortonormal bagi E_2. Kita dapat menerapkan proses Gram-Schmidt. Normalisasi $\vec{v}$ menghasilkan salah satu vektor basis ortonormalnya, yaitu $\overrightarrow{e_2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}$

proyeksi $\vec{u}$ pada ruang vektor yang dibangun $\overrightarrow{e_2}$ adalah $(\vec{u} \,.\, \overrightarrow{e_2})\overrightarrow{e_2} = \sqrt{2} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, komponen $\vec{u}$ yang tegak lurus dengan proyeksi tersebut adalah:

$$\vec{u} - (\vec{u} \,.\, \overrightarrow{e_2})\overrightarrow{e_2} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Normalisasi vektor ini menghasilkan $\overrightarrow{e_3} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$ vektor ini adalah vektor yang membangun ruang eigen E_2, sehingga $\{\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_2}\}$ merupakan basis ortonormal bagi E_2. Jadi, dekomposisi spektral A adalah :

$$A = \lambda_1 \overrightarrow{e_1}\ \overrightarrow{e_2}' + \lambda_2 \overrightarrow{e_2}\ \overrightarrow{e_2}' + \lambda_3 \overrightarrow{e_3}\ \overrightarrow{e_3}'$$

$$A = \left(12 \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \right) + \left(6 \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix} \right) + \left(6 \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \right)$$

Dekomposisi ini tidak tunggal. Terdapat tak berhingga basis yang mungkin bagi E_2.

Penerapan dari dekomposisi spektral adalah untuk menetukan delinasi dan distribusi resevoar dan analisis faciesnya pada lingkungan pengendapan laut dalam. Pada penerapan ini, metode dekomposisi spektral dikombinasikan dengan ekstraksi atribut seismik RMS. Adapun langkah yang dilakukan adalah dengan melakukan validasi seismik data dan validasi data sumur. Kemudian dilakukan pengikatan sumur dengan seismik dan *interpretasion horizon*. Langkah selanjutnya adalah pengaplikasian dekomposisi spektral dan seismik atribut serta analisis facies reservoir [4].

Contoh lain penerapan dekomposisi spektral yang lain adalah untuk pemetaan batu pasir tipis minyak, meningkatkan resolusi data seismik pada lapisan tipis batubara, interpretsasi paleogeografi sistem lakustrin – rift di sub – cekungan [5]. Beberapa aplikasi dari dekomposisi bisa dilihat di [6]–[12]

4. KESIMPULAN DAN SARAN

Dekomposisi spektral adalah perkalian suatu matriks A dengan nilai eigen dan vektor eigen dari matriks tersebut yang hasilnya akan sama dengan PDP^t dimana P merupakan matriks yang entrinya merupakan entri dari vektor eigen matriks A dan D merupakan matriks diagonal dari matriks A. Dekomposisi spektral dapat diterapkan dalam berbagai hal. Salah satunya adalah untuk menetukan delinasi dan distribusi resevoar dan analisis faciesnya pada lingkungan pengendapan laut dalam. Penerapan dekomposisi spetral telah dilakukan pada berbagai hal, untuk mempermudah dalam menerapkan dekomposisi spektral, diciptakan software untuk mengaplikasikan metode ini. Dengan menggunakan dekomposisi spektral, akan diperoleh hasil yang lebih baik karena perhitungan dengan dekomposisi spektral menggunakan matriks simetri.

DAFTAR PUSTAKA

[1] J. E. Gentle, *Matrix Algebra: Theory, Computations, and Applications in Statistics*. New York: Springer , 2007.

[2] An. Safidah, “Analissi Dekomposisi Spektral,” UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM, Malang, 2014.

[3] S. Banerjee and A. Roy, *Linear Algebra and Matrix Analysis for Statistics*. CRC Press, 2014.

[4] N. A. Putri, D. D. Warnana, and P. H. Wijaya, “KARAKTERISASI RESERVOIR GAS BIOGENIK PADA LAPANGAN ‘TG’ DENGAN MENGGUNAKAN ATRIBUT INVERSI IA DAN DEKOMPOSISI SPEKTRAL,” *Jurnal Geosaintek*, vol. 2, no. 2, pp. 99–106, 2016.

[5] I. S. Oktavianti, A. Haris, A. Riyanto, and R. I. Sebayang, “DEKOMPOSISI SPEKTRAL BERDASARKAN TRANSFORMASI WAVELET KONTINYU UNTUK PEMETAAN BATUPASIR GAS DI FORMASI TARAKAN, STUDI KASUS CEKUNGAN TARAKAN – KALIMANTAN UTARA,” in *Prosiding Seminar Nasional Fisika SNF2020*, 2020, no. 1, pp. 1–4. doi: 10.21009/03.SNF2020.

[6] M. N. Husni, “Diagonalisasi Operator Linear,” *UJMC (Unisda Journal of Mathematics and Computer Science)*, vol. 8, no. 2, pp. 7–13, 2022.

[7] I. G. A. W. Wardhana, “The Decomposition of a Finitely Generated Module over Some Special Ring,” *JTAM (Jurnal Teori dan Aplikasi Matematika)*, vol. 6, no. 2, pp. 261–267, 2022, doi: 10.31764/jtam.v6i2.6769.

[8] I. G. A. W. Wardhana and F. Maulana, “Sebuah Karakteristik dari Modul Uniserial dan Gelanggang Uniserial,” vol. 7, pp. 9–17, 2021.

[9] R. Juliana, I. G. W. W. Wardhana, and I. Irwansyah, “Some Characteristics of Prime Submodules of Gaussian Integer Modulo over Integer,” in *Proceeding International Conference on Science (ICST)*, 2020, pp. 209–213.

[10] I. G. A. W. Wardhana and P. Astuti, “Karakteristik Submodul Prima Lemah dan Submodul Hampir Prima pada Z-Modul Zn,” *Jurnal Matematika & Sains*, vol. 19, no. 1, pp. 16–20, 2014.

[11] W. U. Misuki, G. A. W. Wardhana, and N. W. Switrayni, “Some Characteristics of Prime Cyclic Ideal On Gaussian Integer Ring Modulo,” *IOP Conf Ser Mater Sci Eng*, vol. 1115, no. 1, p. 012084, 2021, doi: 10.1088/1757-899X/1115/1/012084.

[12] I. G. A. W. Wardhana, N. D. H. Nghiem, N. W. Switrayni, and Q. Aini, “A note on almost prime submodule of CSM module over principal ideal domain,” *J Phys Conf Ser*, vol. 2106, no. 1, p. 012011, Nov. 2021, doi: 10.1088/1742-6596/2106/1/012011.